C1.5 Legea lui Planck. Aplicație la Corpul Negru

$$\boxed{E_{Planck} = E(\upsilon) = nh\upsilon}$$

Rezolvarea paradoxului corpului negru a fost dată de Planck prin ipoteza (inspirată) de a considera și energia radiației ca fiind dependentă de frecvență, cu o constantă de proporționalitate universală (h-constanta lui Planck), așa cum apare constanta universală Boltzmann în energia termică, în plus fiind cuntificată în ”bulgări energetici”- ceea ce s-a consacrat drept cuante de energie.

De data aceasta, energia fiind cuantificată, deci discretizată, media sa pe mod de vibrație se va calcula cu serii în locul integralelor:

$$\boxed{\langle E\rangle_{\upsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E(\upsilon)\wp(E(\upsilon))}{\sum_{n=0}^{\infty}\wp(E(\upsilon))}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\upsilon\exp(-nh\upsilon\beta)}{\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-nh\upsilon\beta)} = -\frac{d}{d\beta}\left[\log\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-nh\upsilon\beta)\right]$$

$$\boxed{= -\frac{d}{d\beta}\left[\log\frac{1}{1-\exp(-h\upsilon\beta)}\right] = \frac{h\upsilon}{\exp(h\upsilon\beta)-1}}$$

În fine, multiplicând această energie medie cu numărul de moduri de vibrație din cavitate, și raportând rezultatul la volumul cavității, se obține expresia densității spectrale Planck în perfect acord cu întregul profil spectral observat în Figura C.1.2. Pentru confirmare, se verifică limitele extreme:

$$\boxed{\rho_{Planck}(\upsilon) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\upsilon^3}{\exp\left(\frac{h\upsilon}{k_B T}\right)-1}}$$

- La frecvențe mici, se regăsește densitatea spectrală Rayleigh-Jeans

$$\boxed{\upsilon, \frac{h\upsilon}{k_B T} << 1 \Rightarrow \exp\left(\frac{h\upsilon}{k_B T}\right) \cong 1 + \frac{h\upsilon}{k_B T}}$$

$$\boxed{\rho_{Planck}(\upsilon) \xrightarrow{\upsilon<<1} \rho_{R-J}(\upsilon)}$$

- La frecvențe mari, se observă evitarea ”catastrofei UV” din cazul tratamentului clasic la frecvențe infinite.

$$\boxed{\upsilon, \frac{h\upsilon}{k_B T} >> 1 \Rightarrow \exp\left(\frac{h\upsilon}{k_B T}\right) - 1 \cong \exp\left(\frac{h\upsilon}{k_B T}\right)}$$

$$\boxed{\rho_{Planck}(\upsilon) \xrightarrow{\upsilon>>1} 0}$$

Mai mult decât atât, încheiem prezentarea cu întrebarea: ”cum ar arăta lumea fără constanta lui Planck?” Pentru aceasta vom efectua limita pentru $h \to 0$ în densitatea spectrală corectă (Planck); se obține expresia identică din nou cu legea Rayleigh-Jeans la frecvențe mici; acest rezultat permite constatarea că ”lumea (Natura, Universul) fără constanta lui Planck ar fi catastrofală – adică supusă inevitabil catastrofei UV”. De unde, necesitatea considerării constantei Planck în tratarea corectă (la orice frecvențe) a fenomenelor Naturii.

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\rho_{Planck}(\upsilon) \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{8\pi\upsilon^2}{c^3}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{d}{dh}(h\upsilon)}{\frac{d}{dh}\left[\exp\left(\frac{h\upsilon}{k_B T}\right)-1\right]} = \rho_{R-J}(\upsilon)}$$